

A new class of magic positive Ehrhart polynomials of reflexive polytopes

大阪大学 大学院情報科学研究科 情報基礎数学専攻
鴻池真斗 (Masato KONOIKE) *

概要

Ehrhart 多項式の magic positive 性は, h^* 多項式の real-rooted 性を示すための有用な道具である. 本稿では, Ehrhart 多項式が magic positive になる新たなクラスの反射的多面体を紹介する. 初めに, Stasheff polytope の Ehrhart 多項式の magic positive 性について紹介し, 次に, サイクルグラフから生じる対称辺多面体の双対に対する Ehrhart 多項式の magic positive 性について紹介する.

本講演は [9] の内容に基づく.

1 導入

この章では Ehrhart 理論の基本的な事実を紹介する.

$P \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元整凸多面体, つまり, 任意の頂点の座標が全て整数であるような凸多面体とし, ∂P をその境界とする.

$\mathbb{R}^d$ の原点が P の内部に属する唯一の整数点になっていると仮定する. このとき, 整凸多面体 P が**反射的**であるとは, その双対凸多面体

$$P^* := \{y \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, y \rangle \leq 1, \forall x \in P\}$$

もまた整凸多面体となるときに言う. ここで, $\langle x, y \rangle$ は $\mathbb{R}^d$ の通常の内積のことである. 一般に, 整凸多面体 P, Q が $P \subset Q$ ならば $Q^* \subset P^*$ が成り立つ.

任意の正の整数 n について, $E_P(n)$ を

$$E_P(n) = |nP \cap \mathbb{Z}^d|$$

で定義する. [3] により, $E_P(n)$ は n についての次数 d の多項式で定数項が 1 になることが知られている. この多項式 $E_P(n)$ を P の **Ehrhart 多項式**と呼ぶ.

Ehrhart 多項式の母関数 $1 + \sum_{n \geq 1} E_P(n)t^n$ を考えると, 次のような有理関数の形になることが知られている:

$$1 + \sum_{n \geq 1} E_P(n)t^n = \frac{h_0^* + h_1^*t + \cdots + h_d^*t^d}{(1-t)^{d+1}}.$$

* E-mail:kounoike-m@ist.osaka-u.ac.jp

この母関数の分子の係数からなる数列

$$h^*(P) = (h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$$

を P の h^* 列と呼ぶ. また, h^* 列を係数とする多項式 $h_P^*(t) = h_0^* + h_1^*t + \dots + h_d^*t^d$ を P の h^* 多項式と呼ぶ. また, [6] により, 整凸多面体 P が反射的凸多面体となる必要十分条件は h^* 列が対称, つまり

$$h_i^* = h_{d-i}^* \quad 0 \leq \forall i \leq d$$

が成立することが知られている. さらに, h^* 列について次のことが成立する.

- $h_0^* = 1, h_1^* = |P \cap \mathbb{Z}^d| - (d+1), h_d^* = |(P \setminus \partial P) \cap \mathbb{Z}^d|$.
- h_i^* は非負である [11].
- $E_P(n)$ の最高次の係数 $\sum_{i \geq 0} h_i^*/d!$ は通常の P の体積と一致する.

d 次元整凸多面体 $P, Q \subset \mathbb{R}^d$ について, P と Q が **unimodular 同値** であるとは, unimodular 行列 $U \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ と整数ベクトル $w \in \mathbb{Z}^d$ が存在して, U により定義される線形写像 $f_U : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ を用いて $Q = f_U(P) + w$ とできる時に言う. ここで $v \in \mathbb{R}^d$ に対し, $f_U(v) = vU$ と定める. P と Q が unimodular 同値ならば $E_P(n) = E_Q(n)$ が成立する.

2 準備

この章では主結果で必要となる事実を紹介する.

2.1 多項式の real-rooted 性

次数 d の実係数を持つ多項式 $f = \sum_{i=0}^d a_i t^i$ が **real-rooted** であるとは, その根が全て実数であるときに言う. また, real-rooted な多項式のすべての係数が非負, すなわち, そのすべての実根が非正であるとき, 任意の i について $a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}$ が成り立つ. この不等式を満たす係数列 a_i を **log-concave** と言う. この log-concave な数列が非負であるとき **unimodal** になる. つまり, ある k に対して $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_k \geq \dots \geq a_d$ が成立することを意味する.

2.2 Stasheff polytope

St_d を集合

$$\{\pm e_i : 1 \leq i \leq d\} \cup \{e_i + \dots + e_j : 1 \leq i < j \leq d\}$$

の凸包で定義する. ここで $e_1, \dots, e_d$ を $\mathbb{R}^d$ の単位ベクトルとする. このとき, St_d は次元 d の反射的整凸多面体であり, この整凸多面体の双対を **Stasheff polytope (associahedron)** と言う.

2.3 対称辺多面体

G を頂点集合 $[d]$ 上の有限単純グラフとし、その辺集合を $E(G)$ とする。対称辺多面体 $P_G \subset \mathbb{R}^d$ は、集合

$$\{\pm(e_v - e_w) \in \mathbb{R}^d \mid vw \in E(G)\}$$

の凸包で定義する。ここで $e_v \in \mathbb{R}^{|V|}$ は G の頂点 v によって添字付けられた単位ベクトルとする。 P_G はある反射的な整凸多面体と unimodular 同値であることが知られている [10]。

2.4 Magic positive 性

$E_P(n)$ を次のような異なる基底で表すことを考える：

$$E_P(n) = \sum_{i=0}^d a_i n^i (1+n)^{d-i}.$$

$a_0, \dots, a_d \geq 0$ であるとき、 $E_P(n)$ は **magic positive** であると言う。Ehrhart 多項式が magic positive であるとき、Ehrhart 多項式の係数は全て正であり、 h^* 多項式は real-rooted になることが知られている [4, Theorem 4.19]。また、[1, Proposition 4.11] より、 d 次元整凸多面体 P が反射的整凸多面体であることと、任意の $0 \leq j \leq d$ に対して $a_j = a_{d-j}$ が成り立つことは同値である。

自然な問題として、次の問題を考える。

問題 2.1. Ehrhart 多項式が magic positive になる整凸多面体は何か。

Ehrhart 多項式が magic positive になる整凸多面体は次の 2 つが知られている。

- Zonotope[1]
- Pitman-Stanley polytope[5]

ここで、Ehrhart 多項式が magic positive になる多面体の例をいくつか紹介する。

例 2.2 (cross polytope の双対). Cr_d を集合

$$\{\pm \mathbf{e}_i \mid 1 \leq i \leq d\}$$

の凸包で定義する。このとき、 Cr_d は次元 d の反射的整凸多面体であり、この多面体を **cross polytope** と呼ぶ。 Cr_d の双対は $[-1, 1]^d$ になるので、Ehrhart 多項式は次のように計算できる：

$$E_{\text{Cr}_d^*}(n) = (2n+1)^d = \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} (n+1)^{d-i} n^i.$$

従って、 $E_{\text{Cr}_d^*}(n)$ は magic positive である。

例 2.3 (A 型 root polytope の双対). $\mathbf{A}_d$ を集合

$$\{\pm \mathbf{e}_i \mid 1 \leq i \leq d\} \cup \{\pm(\mathbf{e}_i + \dots + \mathbf{e}_j) \mid 1 \leq i < j \leq d\}$$

の凸包で定義する. このとき, $\mathbf{A}_d$ は次元 d の反射的整凸多面体であり, この多面体を **A 型 root polytope** と呼ぶ. $\mathbf{A}_d$ の双対の Ehrhart 多項式は [7, Lemma 5.3] で計算されていて, 次のようになる:

$$E_{\mathbf{A}_d^*}(n) = \sum_{k=0}^d \binom{d+1}{k} n^k = \sum_{i=0}^d (n+1)^{d-i} n^i.$$

従って, $E_{\mathbf{A}_d^*}(n)$ は magic positive である.

例 2.4 (C 型 root polytope の双対). $\mathbf{C}_d$ を集合

$$\{\pm \mathbf{e}_i \mid 1 \leq i \leq d\} \cup \{\pm(\mathbf{e}_i + \cdots + \mathbf{e}_{j-1}) \mid 1 \leq i < j \leq d\} \cup \{\pm(2\mathbf{e}_i + \cdots + 2\mathbf{e}_{d-1} + \mathbf{e}_d) \mid 1 \leq i \leq d-1\}$$

の凸包で定義する. このとき, $\mathbf{C}_d$ は次元 d の反射的整凸多面体であり, この多面体を **C 型 root polytope** と呼ぶ. $\mathbf{C}_d$ の双対の Ehrhart 多項式は [8, Theorem 1.1] で計算されていて, 次のようになる:

$$E_{\mathbf{C}_d^*}(n) = (n+1)^d + n^d.$$

従って, $E_{\mathbf{C}_d^*}(n)$ は magic positive である.

3 主結果

3.1 Stasheff polytope の Ehrhart 多項式の magic positive 性

はじめに, Stasheff polytope の Ehrhart 多項式の magic positive 性を考えるに至った動機について説明する.

[7] で cross polytope, Stasheff polytope の双対, A 型 root polytope と C 型 root polytope の CL 性について研究された. ここで反射的整凸多面体 P が **CL-polytope** であるとは, Ehrhart 多項式 $E_P(n)$ の全ての根の実部が $-\frac{1}{2}$ になるときに言う. これらの整凸多面体の双対は Stasheff polytope の双対を除き zonotope であることが知られている [2]. しかし, Stasheff polytope は zonotope でも Pitman-Stanley polytope でもないので, Ehrhart 多項式が magic positive かどうかは直ちに分からない. そこで, 本稿の 1 つ目の主結果として, Stasheff polytope の Ehrhart 多項式が magic positive であることを示した.

定理 3.1. Stasheff polytope の Ehrhart 多項式は magic positive である.

次の命題 3.2 を用いることで, Stasheff polytope の Ehrhart 多項式を具体的に求めることなく magic positive 性を示すことができる.

命題 3.2. 任意の $d \geq 2$ に対して, $E_{\text{St}_d^*}(n)$ は次の漸化式を満たす.

$$E_{\text{St}_d^*}(n) = (2n+1)E_{\text{St}_{d-1}^*}(n) - \frac{1}{2}n(n+1)E_{\text{St}_{d-2}^*}(n).$$

3.2 対称辺多面体の Ehrhart 多項式の magic positive 性

次にサイクルグラフから生じる対称辺多面体の Ehrhart 多項式の magic positive 性を考えるに至った動機について説明する.

d 頂点の完全グラフ K_d と木 T_d から生じる対称辺多面体は, それぞれ cross polytope と type A の root polytope と unimodular 同値になる. 従って, $E_{P_{K_d}^*}$ と $E_{P_{T_d}^*}$ は magic positive である. また, 任意の d 頂点連結グラフ G に対して $P_{K_d}^* \subset P_G^* \subset P_{T_d}^*$ が成り立つ. これらの事実から, 次のような問題が自然に浮かび上がる.

問題 3.3. 任意の連結グラフから生じる対称辺多面体の Ehrhart 多項式は magic positive か.

この問題に対して $E_{P_{K_{3,7}}^*}$ や $E_{P_{K_{10} \setminus \{e\}}^*}$ が magic positive にならないことが分かった. 具体的には次のようになる.

$$\begin{aligned} E_{P_{K_{3,7}}^*}(n) &= \frac{128}{3}n^9 + 192n^8 + 448n^7 + 672n^6 + \frac{3528}{5}n^5 + 532n^4 + \frac{820}{3}n^3 + 86n^2 + \frac{72}{5}n + 1 \\ &= (n+1)^9 + \frac{27}{5}(n+1)^8n + \frac{34}{5}(n+1)^7n^2 - \frac{142}{15}(n+1)^6n^3 + \frac{88}{5}(n+1)^5n^4 \\ &\quad + \frac{88}{5}(n+1)^4n^5 - \frac{142}{15}(n+1)^3n^6 + \frac{34}{5}(n+1)^2n^7 + \frac{27}{5}(n+1)n^8 + n^9. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{P_{K_{10} \setminus \{e\}}^*}(n) &= \frac{92}{9}n^9 + 46n^8 + \frac{364}{3}n^7 + 210n^6 + \frac{3766}{15}n^5 + 210n^4 + \frac{1084}{9}n^3 + 45n^2 + \frac{149}{15}n + 1 \\ &= (n+1)^9 + \frac{14}{15}(n+1)^8n + \frac{23}{15}(n+1)^7n^2 - \frac{19}{45}(n+1)^6n^3 + \frac{31}{15}(n+1)^5n^4 \\ &\quad + \frac{31}{15}(n+1)^4n^5 - \frac{19}{45}(n+1)^3n^6 + \frac{23}{15}(n+1)^2n^7 + \frac{14}{15}(n+1)n^8 + n^9. \end{aligned}$$

そして, サイクルグラフから生じる対称辺多面体の Ehrhart 多項式が magic positive になることを予想し, この予想を部分的に解決した. これが本稿 2 つ目の主結果である.

定理 3.4. $E_{P_{C_{d+1}}^*}(n)$ を $E_{P_{C_{d+1}}^*}(n) = \sum_{j=0}^d a_j n^j (1+n)^{d-j}$ と変形する. このとき, $i = 0, 1, 2$ に対して, 係数 a_i と a_{d-i} は正である. ここで, C_d は d 頂点サイクルグラフを表す.

この定理を証明するために次の命題を使う.

命題 3.5. P_{C_d} を d 頂点サイクルグラフの対称辺多面体とする. このとき, 次が成り立つ.

$$E_{P_{C_{d+1}}^*}(n) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} (-1)^i \binom{(d+1-2i)n + (d-i)}{d} \binom{d+1}{i}.$$

参考文献

- [1] Matthias Beck, Katharina Jochemko, and Emily McCullough. h^* -polynomials of zonotopes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 371(3):2021–2042, 2019.

- [2] Paola Cellini and Mario Marietti. Polar root polytopes that are zonotopes. *Sém. Lothar. Combin.*, 73:Art. B73a, 10, [2014–2016].
- [3] Eugène Ehrhart. Sur les polyèdres rationnels homothétiques à n dimensions. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 254:616–618, 1962.
- [4] Luis Ferroni and Akihiro Higashitani. Examples and counterexamples in Ehrhart theory, 2024.
- [5] Luis Ferroni and Alejandro H. Morales. h^* -polynomial of Pitman-Stanley polytopes, in preparation.
- [6] Takayuki Hibi. Dual polytopes of rational convex polytopes. *Combinatorica*, 12(2):237–240, 1992.
- [7] Akihiro Higashitani, Mario Kummer, and Mateusz Michałek. Interlacing Ehrhart polynomials of reflexive polytopes. *Selecta Math. (N.S.)*, 23(4):2977–2998, 2017.
- [8] Akihiro Higashitani and Yumi Yamada. The distribution of roots of Ehrhart polynomials for the dual of root polytopes of type C . *Graphs Combin.*, 39(4):Paper No. 83, 13, 2023.
- [9] Masato Kounoike. A new class of magic positive ehrhart polynomials of reflexive polytopes. *arXiv preprint arXiv:2409.16648*, 2024.
- [10] Tetsushi Matsui, Akihiro Higashitani, Yuuki Nagazawa, Hidefumi Ohsugi, and Takayuki Hibi. Roots of Ehrhart polynomials arising from graphs. *J. Algebraic Combin.*, 34(4):721–749, 2011.
- [11] Richard P. Stanley. Decompositions of rational convex polytopes. *Ann. Discrete Math.*, 6:333–342, 1980.